Münster.1932.№ 25

Phil. Diss.

Über monotone Funktionen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität
zu Münster in Westfalen

vorgelegt von

Peter Schürmann
aus Werdohl i. W.

Göttingen 1932.
Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Februar 1931.

Dekan: Herr Professor Dr. R. Schmidt.
Referent: Herr Professor Dr. L. Neder.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen lieben Eltern!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547404_0009

§ 1.

Ungleichungen für Differenzen von Funktionswerten

$$M\left(x+\frac{1}{\mu[M(x)]}\right)-M(x)<\beta.$$

Wir nennen eine für $x \geqq a$ erklärte Funktion $M(x)$ für $x \geqq a$ nirgends abnehmend, wenn die Ungleichung besteht

$$M(x_1) \leqq M(x_2) \quad \text{für} \quad a \leqq x_1 \leqq x_2.$$

Verstehen wir nun im folgenden unter der Funktion $M(x)$ eine für $x \geqq a$ nirgends abnehmende, nach Unendlich strebende, stetige Funktion, so hat Borel in seiner Arbeit über ganze Funktionen[1]) folgenden Satz aufgestellt:

Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und $\alpha > 0$ gilt die Ungleichung

$$M\left(x+\frac{1}{[\log M\ (x)]^{\varepsilon}}\right)<[M(x)]^{1+\alpha} \quad \text{für } x \geqq a \text{ „meistens“},$$

d. h. wenn man von einer eventuell unendlichen Anzahl von Intervallen endlicher Gesamtlänge absieht.

Die Beweisführung dieses Satzes läßt insofern zu wünschen übrig, als Borel diese Behauptung zwar für einen einfachen Fall bewies, daß er aber den allgemeinen Fall nicht in Betracht zog.

Ein gleicher Mangel haftet dem Beweis des schärferen Theorems von Sarantopoulos an, das lautet:

Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und $\alpha > 0$ gilt für $x \geqq a$ die Ungleichung

$$M\left(x+\frac{1}{[\log\log M(x)]^{1+\varepsilon}}\right)<[M(x)]^{1+\alpha},$$

wenn man von eventuell unendlich vielen Intervallen endlicher Gesamtlänge absieht[2]).

---

1) „Sur les zéros des fonctions entières“, Acta mathematica t. XX (1897).

2) „Les fonctions croissantes et la théorie des fonctions entières“. Thèses, Straßburg 1923, vgl. Seite 14, théorème général.

Setzt man in diesen Sätzen

$$M(x) = e^{m(x)}, \quad \log M(x) = m(x),$$

wo auch $m(x)$ von einer passenden Stelle an erklärt, nicht abnehmend und stetig, sowie

$$\lim_{x=\infty} m(x) = \infty$$

ist, so transformieren sich die Ungleichungen in:

$$m\left(x + \frac{1}{[m(x)]^{\varepsilon}}\right) < (1+\alpha)\, m(x),$$

bezw.

$$m\left(x + \frac{1}{[\log m(x)]^{1+\varepsilon}}\right) < (1+\alpha)\, m(x).$$

Etwa gleichzeitig mit dem Satze von Sarantopoulos veröffentlichte Varopoulos in den „Comptes rendus“ nach einer Reihe von falschen Sätzen [3]) ohne Beweis auch den folgenden richtigen Satz:

Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und $\alpha > 0$ gilt die Ungleichung

$$m\left(x + \frac{1}{\log_1 m(x) \ldots \log_{\varkappa-1} m(x) [\log_{\varkappa} m(x)]^{1+\varepsilon}}\right) < (1+\alpha)\, m(x)$$

für $x \geqq a$, wenn man von eventl. unendlich vielen Intervallen endlicher Gesamtlänge absieht.

Es bedeutet dabei:

$$\log_0 z = z, \quad \log_{\varkappa} z = \log \log_{\varkappa-1} z \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots).$$

Zu diesem bisher unbewiesenen Satze kam Varopoulos erst, nachdem ihm Sarantopoulos seinen zuvor erwähnten Satz mitgeteilt hatte [4]).

Um die Formulierung der Sätze zu vereinfachen und die Güte der vorhandenen Sätze besser vergleichen zu können, setzen wir weiter:

$$m(x) = e^{M(x)}, \quad \log m(x) = M(x), \quad \log(1+\alpha) = \beta > 0,$$

dann werden die Behauptungen der Sätze von Borel, Sarantopoulos und Varopoulos folgendermaßen transformiert:

Borel:
$$M\left(x + \frac{1}{e^{\varepsilon M(x)}}\right) < \beta + M(x),$$

3) Neder: „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“, Bd. 48, Seiten 399—402.

4) Sarantopoulos: „Les fonctions croissantes et la théorie des fonctions entières“. Thèses, Straßburg 1923, Seite 17.

Sarantopoulos: $M\left(x+\frac{1}{[M(x)]^{1+\varepsilon}}\right)<\beta+M(x)$,

Varopoulos:

$$M\left(x+\frac{1}{M(x)\log_1 M(x)\ldots\log_{\varkappa-2}M(x)\,[\log_{\varkappa-1}M(x)]^{1+\varepsilon}}\right)<\beta+M(x).$$

Setzt man nun linkerhand in den verschiedenen Zuwüchsen des Arguments x

$$M(x)=z,$$

so erhält man eine Skala von Inkrementen

$$\frac{1}{e^{\varepsilon z}},\quad \frac{1}{z^{1+\varepsilon}},\quad \frac{1}{z(\log z)^{1+\varepsilon}},\quad \frac{1}{z\log z(\log\log z)^{1+\varepsilon}},\quad \ldots,$$

in denen man Funktionen

$$\frac{1}{\mu(z)}$$

erkennt, die sämtlich das Integral

$$\int^{\infty}\frac{dz}{\mu(z)}$$

konvergent machen.

Man kommt daher zu der Vermutung, daß auch noch der folgende Satz richtig ist.

Satz 1. Voraussetzung: $\mu(z)$ sei eine positive, stetige, nirgends abnehmende Funktion, die das Integral

$$\int_0^{\infty}\frac{dz}{\mu(z)}$$

konvergent macht. $M(x)$ sei für $x\geqq a$ eine nicht negative, stetige, nirgends abnehmende Funktion, die nach Unendlich wächst, ferner sei $\beta>0$.

Behauptung: Die Ungleichung

$$\text{(I)}\qquad M\left(x+\frac{1}{\mu[M(x)]}\right)<\beta+M(x)$$

gilt für $x\geqq a$ nach Ausschluß von eventuell unendlich vielen Intervallen endlicher Gesamtlänge.

In der Tat läßt sich die Richtigkeit dieses Satzes folgendermaßen beweisen:

Beweis: Die Punkte, in denen die Ungleichung (I) nicht erfüllt ist, wo also

$$M\left(x+\frac{1}{\mu[M(x)]}\right)\geqq\beta+M(x)$$

gilt, bilden eine Menge, deren Punkte als Ausnahmepunkte bezeichnet werden sollen. Sie ist wegen der Stetigkeit von $M(x)$ und $\mu(z)$ abgeschlossen, d. h. sie enthält jeden ihrer Häufungspunkte.

Ich werde nun zeigen, daß sich die Menge der Ausnahmepunkte durch Intervalle überdecken läßt, deren Gesamtlänge endlich ist, womit dann meine Behauptung bewiesen ist.

— Es genügt dabei vorauszusetzen, daß es in jedem Intervall $b \leqq x < \infty$ einen Ausnahmepunkt gibt, da sonst die Behauptung ohne weiteres als zutreffend erkennbar ist. —

Da die Menge meiner Ausnahmepunkte abgeschlossen ist, besitzt sie in jedem Intervall $b \leqq x < \infty$ unter ihren Punkten einen „ersten“ mit kleinster Abszisse. Nun sei x_0 der erste Ausnahmepunkt im Intervall $a \leqq x < \infty$. Es gilt also

$$M\left(x_0 + \frac{1}{\mu[M(x_0)]}\right) \geqq \beta + M(x_0).$$

Da nach Voraussetzung

$$M(x_0) \geqq 0 \cdot \beta$$

ist, folgt bei

$$x_0 + \frac{1}{\mu[M(x_0)]} = x_0', \quad x_0' - x_0 = \frac{1}{\mu[M(x_0)]}$$

die Beziehung

$$M(x_0') \geqq \beta.$$

Es sei nun x_1 der erste unter den Ausnahmepunkten im Intervall

$$x_0' \leqq x < \infty, \quad \text{also } x_1 \geqq x_0',$$

so gilt weiter

$$M(x_1) \geqq M(x_0') \geqq 1 \cdot \beta$$

und

$$M\left(x_1 + \frac{1}{\mu[M(x_1)]}\right) \geqq \beta + M(x_1),$$

also bei

$$x_1 + \frac{1}{\mu[M(x_1)]} = x_1', \quad x_1' - x_1 = \frac{1}{\mu[M(x_1)]}$$

die Beziehung

$$M(x_1') \geqq 2 \cdot \beta.$$

Allgemein sei $x_{\nu-1}'$ erreicht, und es gelte

$$M(x_{\nu-1}') \geqq \nu \cdot \beta.$$

Dann sei x_ν der erste Ausnahmepunkt im Intervall

$$x_{\nu-1}' \leqq x < \infty,$$

also $$x_\nu \geqq x_{\nu-1}', \quad M(x_\nu) \geqq M(x_{\nu-1}') \geqq \nu\beta$$

und

$$M\left(x_\nu + \frac{1}{\mu[M(x_\nu)]}\right) \geqq \beta + M(x_\nu).$$

Dann gilt bei

$$x'_\nu = x_\nu + \frac{1}{\mu[M(x_\nu)]}, \quad x'_\nu - x_\nu = \frac{1}{\mu[M(x_\nu)]}$$

die Beziehung

$$M(x'_\nu) \geqq (\nu+1)\beta.$$

Wir erhalten also für $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge von Punktepaaren x_ν, x'_ν mit

$$M(x_\nu) \geqq \nu\beta, \quad x'_\nu - x_\nu = \frac{1}{\mu[M(x_\nu)]}$$

derart, daß die Menge der Ausnahmepunkte von den Intervallen $[x_\nu, x'_\nu]$ überdeckt wird. Aus der Ungleichung

$$M(x_\nu) \geqq \nu\beta$$

geht nämlich hervor:

$$\text{für } \nu \to \infty \text{ strebt } M(x_\nu) \to \infty, \text{ also } x_\nu \to \infty,$$

d. h. also: Wenn wir mit $\nu \to \infty$ gehen, so erfassen wir jeden Ausnahmepunkt. Es ist weiter

$$\mu[M(x_\nu)] \geqq \mu(\nu\beta),$$

da $\mu(z)$ nach Voraussetzung eine nirgends abnehmende Funktion ist.

Also ist

$$\frac{1}{\mu[M(x_\nu)]} \leqq \frac{1}{\mu(\nu\beta)}.$$

Andererseits ist

$$\frac{1}{\mu[M(x_\nu)]} = x'_\nu - x_\nu.$$

Die Gesamtlänge unserer überdeckenden Intervalle stellt sich dar als

$$(x'_0 - x_0) + (x'_1 - x_1) + (x'_2 - x_2) + \cdots,$$

wobei

$$\begin{aligned} L_n &= (x'_0 - x_0) + (x'_1 - x_1) + \cdots + (x'_n - x_n) \\ &= (x'_0 - x_0) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\mu[M(x_\nu)]} \\ &\leqq \frac{1}{\mu[M(x_0)]} + \frac{1}{\beta} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\beta}{\mu(\nu\beta)} \\ &\leqq \frac{1}{\mu[M(a)]} + \frac{1}{\beta} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{(\nu-1)\beta}^{\nu\beta} \frac{dz}{\mu(z)} \end{aligned}$$

$$\leqq \frac{1}{\mu[M(a)]} + \frac{1}{\beta}\int_0^{n\beta} \frac{dz}{\mu(z)}$$

$$\leqq \frac{1}{\mu[M(a)]} + \frac{1}{\beta}\int_0^{\infty} \frac{dz}{\mu(z)}.$$

Also konvergiert die Reihe für unsere Gesamtlänge, und es ist deren Wert

$$L \leqq \frac{1}{\mu[M(a)]} + \frac{1}{\beta}\int_0^{\infty} \frac{dz}{\mu(z)}.$$

Damit ist der Satz 1 bewiesen.

Daß bei Beschränkung auf nirgends abnehmende Funktionen $\mu(z)$ der Satz 1 der beste in seiner Art ist und die Funktionen $\mu(z)$ nicht außerhalb des darin umgrenzten Spielraums gewählt werden dürfen, zeigt der folgende Satz.

Satz 2. $\mu(z)$ sei eine positive, stetige, nirgends abnehmende Funktion, die das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\mu(z)}$$

divergent macht, und $\beta > 0$ sei beliebig, dann gibt es zu jedem solchen $\mu(z)$ und zu jedem $\beta > 0$ eine Funktion $M(x)$, die $\geqq 0$, stetig und nirgends abnehmend ist und die Ungleichung

$$\text{(II)} \qquad M\left(x + \frac{1}{\mu[M(x)]}\right) \geqq \beta + M(x)$$

in unendlich vielen Intervallen unendlicher Gesamtlänge erfüllt.

Wir haben also zu jedem $\mu(z)$ und zu jedem $\beta > 0$ eine Funktion $M(x)$ zu bilden, bei welcher die Ungleichung (II) in unendlich vielen Intervallen unendlicher Gesamtlänge erfüllt ist.

Wir werden sogar Funktionen konstruieren, bei denen die Ungleichung (II) im ganzen Definitionsgebiet erfüllt ist.

Diese Beispiele zeigen, daß man unter den Voraussetzungen des Satzes 2 nicht behaupten kann, daß die Ungleichung (I) rechts von jeder Stelle immer wieder einmal erfüllt ist, noch nicht einmal, daß sie in einem einzigen Punkte erfüllt ist.

Beweis des Satzes 2: Für Funktionen $\mu(z)$, die beschränkt sind, ist der Satz trivial; denn es ist dann

$$0 < \mu(z) \leqq K, \quad \frac{1}{\mu(z)} \geqq \frac{1}{K}$$

von einer Stelle an, also wird

$$M\left(x + \frac{1}{\mu[M(x)]}\right) \geqq M\left(x + \frac{1}{K}\right).$$

Es genügt daher, eine Funktion aufzuweisen mit

$$M\left(x+\frac{1}{K}\right) \geqq \beta + M(x).$$

Eine solche Funktion ist aber

$$M(x) = \beta K x;$$

denn dann wird

$$M\left(x+\frac{1}{K}\right) = \beta K\left(x+\frac{1}{K}\right) = \beta K x + \beta = \beta + M(x).$$

Es sei nunmehr

$$x_0 = 0, \quad x_\nu = x_{\nu-1} + \frac{1}{\mu(\nu\beta)}, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

— Daß die x_n mit wachsendem n gegen unendlich gehen, folgt aus:

$$x_n = x_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - x_{\nu-1}) = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\mu(\nu\beta)} = \frac{1}{\beta}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\beta}{\mu(\nu\beta)}$$

$$\geqq \frac{1}{\beta}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\nu\beta}^{(\nu+1)\beta}\frac{dz}{\mu(z)} = \frac{1}{\beta}\int_{\beta}^{(n+1)\beta}\frac{dz}{\mu(z)} \to \infty. \; —$$

Wir definieren nun:

$$M(x_\nu) = \nu\beta, \qquad \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$M(x) = \text{linear in } [x_{\nu-1}, x_\nu], \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Die Steigung der Funktion $M(x)$ im Intervall $[x_{\nu-1}, x_\nu]$

$$= \frac{\nu\beta - (\nu-1)\beta}{x_\nu - x_{\nu-1}} = \beta\mu(\nu\beta)$$

nimmt jedenfalls nirgends ab mit wachsendem ν, d. h. also: die Strecken, aus denen die Funktion $M(x)$ besteht, drehen im positiven Sinne oder behalten die Richtung bei, also ist $M(x)$ schwach hohl nach oben.

Für $x_{\nu-1} \leqq x < x_\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, ist

$$M(x) \leqq M(x_\nu) = \nu\beta, \quad \mu[M(x)] \leqq \mu(\nu\beta), \quad \frac{1}{\mu[M(x)]} \geqq \frac{1}{\mu(\nu\beta)}$$

$$M\left(x+\frac{1}{\mu[M(x)]}\right) \geqq M\left(x+\frac{1}{\mu(\nu\beta)}\right)$$

$$M\left(x+\frac{1}{\mu[M(x)]}\right) - M(x) \geqq M\left(x+\frac{1}{\mu(\nu\beta)}\right) - M(x)$$

$$x+\frac{1}{\mu(\nu\beta)} \geqq x_{\nu-1} + \frac{1}{\mu(\nu\beta)} = x_\nu.$$

Es ist wegen der Hohlheit nach oben

$$\frac{M(x+1/\mu(\nu\beta))-M(x)}{1/\mu(\nu\beta)} \geqq \frac{M(x_\nu)-M(x)}{x_\nu - x}$$

$$\geqq \frac{M(x_\nu)-M(x_{\nu-1})}{x_\nu - x_{\nu-1}} = \beta\mu(\nu\beta),$$

also schließlich

$$M\left(x+\frac{1}{\mu[M(x)]}\right)-M(x) \geqq M\left(x+\frac{1}{\mu(\nu\beta)}\right)-M(x)$$

$$\geqq \beta\mu(\nu\beta)\cdot\frac{1}{\mu(\nu\beta)} = \beta,$$

was zu zeigen war.

§ 2.

Ungleichung zwischen Ableitung und Funktionswert

$$M'(x) < \beta\mu[M(x)].$$

Im zweiten Teil meiner Ausführungen werde ich mich mit folgendem Satz[5]) von Borel beschäftigen:

$m(x)$ sei für $x \geqq a$ eine positive, stetige, monoton wachsende Funktion, deren erste Ableitung $m'(x)$ existiert und ebenfalls stetig sein soll, $\alpha > 0$ sei beliebig.

Dann gilt die Ungleichung

$$m'(x) < [m(x)]^{1+\alpha}$$

für alle x-Werte, die oberhalb eines gewissen x_0 liegen, nach Ausschließung einer Reihe von Intervallen endlicher Gesamtausdehnung.

Rémoundos hat gezeigt[6]), daß diese Ungleichung ersetzt werden kann durch

$$M'(x) < M(x)\,[\log M(x)]^{1+\alpha}.$$

Varopoulos[7]) gab eine noch genauere Ungleichung

$$M'(x) < M(x)\log_1 M(x)\ldots\log_{x-1} M(x)\,[\log_x M(x)]^{1+\alpha}.$$

Sarantopoulos hat in seinen „Thèses“ [8]) erwähnt, daß diese Resultate nichts anderes darstellen, als den Borelschen Satz, angewandt auf die Funktion

$$m(x) = \log_x M(x).$$

5) Acta mathematica t. XX (1897) S. 383/384 (siehe Fußnote 1).

6) „Sur les fonctions croissantes et les fonctions entières“ — Comptes rendus t. 170 p. 829.

7) „Sur quelques théorèmes de M. Rémoundos“ Comptes rendus t. 171 p. 613.

8) Vergl. Fußnote 4.

Sie gelten also unter denselben Voraussetzungen wie der Borelsche Satz.

Betrachtet man diese Sätze, so kommt man zu der Vermutung, daß auch noch der folgende Satz richtig ist:

Satz 3. Voraussetzung: $M(x)$ sei für $x \geqq a$ eine nicht negative, nirgends abnehmende, nach ∞ strebende Funktion, deren erste Ableitung $M'(x)$ existiert und stetig ist. $\mu(z)$ sei eine positive, stetige, monotone Funktion, die das Integral

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\mu(z)}$$

konvergent macht.

Behauptung: Es gilt die Ungleichung

$$M'(x) < \mu[M(x)] \quad \text{für} \quad x \geqq a$$

nach Ausschluß eventuell unendlich vieler Intervalle endlicher Gesamtlänge.

Beweis: Die Punkte, in denen meine Behauptung nicht erfüllt ist, wo also die Ungleichung

$$M'(x) \geqq \mu[M(x)]$$

gilt, bilden eine Menge $\mathfrak{M}$, deren Elemente als Ausnahmepunkte bezeichnet werden sollen. Diese Menge ist wegen der Stetigkeit von $M'(x)$ und $\mu[M(x)]$ abgeschlossen.

Um jeden Punkt der abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$ konstruiere ich mir ein offenes Intervall mit

$$M'(x) > \tfrac{1}{2}\,\mu[M(x)],$$

das ist wegen der Stetigkeit von $M'(x)$ und $\mu[M(x)]$ möglich.

Betrachte ich jetzt die Teilmenge $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$, die gebildet wird aus den Ausnahmepunkten, die im abgeschlossenen Intervall $[a, A]$ vorkommen, so ist $\mathfrak{M}_1$ abgeschlossen und beschränkt. Es läßt sich also auf diese Menge $\mathfrak{M}_1$ die von W. H. Young stammende Verallgemeinerung des Borelschen Überdeckungssatzes anwenden, die besagt, daß nur endlich viele Intervalle mit

$$M'(x) > \tfrac{1}{2}\,\mu[M(x)]$$

genügen, um $\mathfrak{M}_1$ zu überdecken. Diese Intervalle sind ersetzbar durch endlich viele nicht übereinandergreifende, offene Intervalle, in denen dieselbe Ungleichung gilt. Schließe ich diese Intervalle durch Hinzunahme der Endpunkte ab, so erhalte ich also zur Überdeckung von $\mathfrak{M}_1$ eine endliche Anzahl nicht übereinandergreifender abgeschlossener Intervalle mit

$$M'(x) \geqq \tfrac{1}{2}\,\mu[M(x)] > 0.$$

Daraus folgt, daß zur Überdeckung der Menge $\mathfrak{M}$ eine abzählbar unendliche Menge von abgeschlossenen Intervallen obiger Beschaffenheit genügt, die ich mit $[a_\nu, b_\nu]$, $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ bezeichne. Es ist also

$$a_1 < b_1 \leqq a_2 < b_2 \leqq \cdots \leqq a_n < b_n \leqq \cdots,$$

also auch

$$M(a_1) \leqq M(b_1) \leqq M(a_2) \leqq M(b_2) \leqq \cdots \leqq M(a_n) \leqq M(b_n) \leqq \cdots.$$

Die Länge L_ν des ν-ten Intervalles $[a_\nu, b_\nu]$ stellt sich dar als

$$b_\nu - a_\nu = \int_{a_\nu}^{b_\nu} dx = \int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{M'(x)\,dx}{M'(x)} \leqq 2 \int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{M'(x)\,dx}{\mu[M(x)]}.$$

Setze ich jetzt

$$M(x) = z, \quad M'(x)\,dx = dz,$$

so ist

$$z = M(a_\nu), \quad \text{falls } x = a_\nu$$
$$z = M(b_\nu), \quad \text{falls } x = b_\nu \text{ war.}$$

Daher ergibt sich

$$b_\nu - a_\nu \leqq 2 \int_{M(a_\nu)}^{M(b_\nu)} \frac{dz}{\mu(z)}.$$

Die Gesamtlänge der Intervalle, in denen

$$M'(x) \geqq \tfrac{1}{2}\,\mu[M(x)]$$

galt, stellt sich dar als

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) + \cdots,$$

wobei

$$L_n = \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} 2 \int_{M(a_\nu)}^{M(b_\nu)} \frac{dz}{\mu(z)} \leqq 2 \int_0^\infty \frac{dz}{\mu(z)}.$$

Also konvergiert die Reihe für unsere Gesamtlänge, und es ist deren Wert

$$L \leqq 2 \int_0^\infty \frac{dz}{\mu(z)}.$$

Anmerkung 1. Es sei β eine willkürliche, positive Zahl, dann ist mit

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\mu(z)} \text{ auch } \int_0^\infty \frac{dz}{\beta\,\mu(z)} \text{ konvergent.}$$

Daraus folgt, daß unter den gegebenen Voraussetzungen auch noch der folgende Satz gilt:

Nach Ausschluß einer höchstens abzählbaren Menge von Intervallen endlicher Gesamtlänge ist

$$M'(x) < \beta\, \mu[M(x)]. \tag{III}$$

Anmerkung 2. Man kann den in der Anmerkung 1 bewiesenen Satz auch dadurch beweisen, daß man den Borelschen Satz

$$m'(x) < [m(x)]^{1+\alpha}$$

auf die Funktion

$$m(x) = \int_0^{\gamma M(x)} \frac{dy}{\mu(y/\gamma)},$$

bei passendem γ anwendet.

Ist nämlich

$$m(x) = \int_0^{\gamma M(x)} \frac{dy}{\mu(y/\gamma)},$$

so ist

$$m'(x) = \frac{1}{\mu(\gamma M(x)/\gamma)} \cdot \gamma M'(x) = \frac{\gamma M'(x)}{\mu[M(x)]}.$$

Nach Borel ist also

$$\frac{\gamma M'(x)}{\mu[M(x)]} < \left[\int_0^{\gamma M(x)} \frac{dy}{\mu(y/\gamma)}\right]^{1+\alpha} < \left[\int_0^{\infty} \frac{dy}{\mu(y/\gamma)}\right]^{1+\alpha}.$$

Setzen wir jetzt

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\mu(z)} = K, \quad \frac{y}{\gamma} = z, \quad y = \gamma z, \quad dy = \gamma\, dz,$$

so folgt

$$\frac{\gamma M'(x)}{\mu[M(x)]} < \left[\int_0^{\infty} \frac{\gamma\, dz}{\mu(z)}\right]^{1+\alpha} = \gamma^{1+\alpha} K^{1+\alpha}, \qquad \frac{M'(x)}{\mu[M(x)]} < \gamma^{\alpha} K^{1+\alpha}.$$

Damit diese Ungleichung bei gegebenem $\beta > 0$ in (III) übergeht, brauchen wir nur zu setzen:

$$\gamma^{\alpha} K^{1+\alpha} = \beta; \quad \gamma = [\beta/K^{1+\alpha}]^{1/\alpha},$$

dann folgt (III), was zu zeigen war.

Daß Satz 3 bei Beschränkung auf monotone $\mu(z)$ keiner Verbesserung fähig ist und in ihm die Funktion $\mu(z)$ unter dieser Beschränkung keinen weiteren Spielraum haben darf, zeigt der folgende Satz:

Satz 4. $\mu(z)$ sei eine positive, stetige, nirgends abnehmende Funktion, die das Integral

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\mu(z)}$$

divergent macht, dann gibt es zu jedem solchen $\mu(z)$ eine stetige, nirgends abnehmende Funktion $M(x) \geqq 0$, deren erste Ableitung überall existiert und stetig ist, so daß die Ungleichung

$$M'(x) \geqq \mu[M(x)]$$

in unendlich vielen Intervallen unendlicher Gesamtlänge besteht.

Den Beweis für diesen Satz liefert das folgende Beispiel:

$$x_0 = 0, \quad x_\nu = x_{\nu-1} + \frac{1}{\mu(\nu)}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

— daß $\lim_{n=\infty} x_n = \infty$ ist, folgt aus $x_n = x_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1}) =$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\mu(\nu)} \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \int_\nu^{\nu+1} \frac{dz}{\mu(z)} = \int_1^{n+1} \frac{dz}{\mu(z)} \to \infty \; -.$$

Wir definieren nun zunächst eine Hilfsfunktion $M_0(x)$ durch die Formeln

$$M_0(x) = \nu \quad \text{für } x = x_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$M_0(x) = \text{linear für } x_{\nu-1} \leqq x \leqq x_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Die Steigung

$$M_0'(x) = \frac{\nu - (\nu - 1)}{1/\mu(\nu)} = \mu(\nu)$$

in $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ wächst monoton mit ν.

Die Strecken, aus denen $M_0(x)$ besteht, drehen mit wachsendem ν im positiven Sinne oder behalten ihre Richtung bei.

Da diese Funktion $M_0(x)$ eventuell in den Punkten mit den Abszissen x_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) nicht differentiierbar ist, setze ich in diese Funktion erforderlichenfalls kleine Kreisbögen hinein, die innerhalb der auf der νten bezw. $(\nu+1)$ten Strecke durch die Ordinaten in

$$x_\nu - \frac{1}{3}\frac{1}{\mu(\nu)} \quad \text{bezw.} \quad x_\nu + \frac{1}{3}\frac{1}{\mu(\nu+1)}$$

abgeschnittenen Teilstrecken berühren. So erhalte ich eine für $x \geqq 0$ differentiierbare Funktion $M(x)$, die nirgends abnimmt, mit

$$\left.\begin{aligned} M(x) &\leqq \nu \\ M'(x) &= M_0'(x) = \mu(\nu) \end{aligned}\right\} \text{ für } x_{\nu-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{\mu(\nu)} \leqq x \leqq x_\nu - \frac{1}{3}\frac{1}{\mu(\nu)}.$$

Dann ist daselbst

$$M'(x) = \mu(\nu) \geqq \mu[M(x)],$$

und da das νte Intervall die Länge

$$x_\nu - x_{\nu-1} - \frac{2}{3}\frac{1}{\mu(\nu)} = \frac{1}{\mu(\nu)} - \frac{2}{3}\frac{1}{\mu(\nu)} = \frac{1}{3}\frac{1}{\mu(\nu)} = \frac{1}{3}(x_\nu - x_{\nu-1})$$

hat, wird die Gesamtlänge der n ersten Intervalle

$$\tfrac{1}{3}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - x_{\nu-1}) = \tfrac{1}{3}(x_n - x_0) = \tfrac{1}{3}x_n \to \infty.$$

Damit ist der Satz 4 bewiesen.

Zum Schluß meiner Betrachtungen werde ich noch untersuchen, ob folgender Satz richtig ist:

$\mu(z)$ sei eine positive, stetige, monoton wachsende Funktion, die das Integral

$$\int_0^x \frac{dz}{\mu(z)}$$

divergent macht, ferner sei $M(x) \geqq 0$ eine stetige, nirgends abnehmende, nach unendlich wachsende Funktion, deren erste Ableitung $M'(x)$ überall existiert und stetig ist, dann gilt die Ungleichung

(IV) $$M'(x) < \mu[M(x)]$$

für beliebig große x.

Sarantopoulos[9]) hat in seinen „Thèses“ folgenden Satz aufgestellt:

Wenn von einer gewissen Stelle ab die wachsende Funktion $M(x)$ kleiner bleibt als $e_\nu(x)$, wo

$$e_0(x) = x, \quad e_\nu(x) = e^{e_{\nu-1}(x)} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist, so gilt die Ungleichung

$$M'(x) < M(x)\log M(x)\cdots\log_{\nu-1} M(x)\log_\nu M(x)$$

in Intervallen, die beliebig weit rechts gelegen sind.

Das heißt mit anderen Worten: Trotz Divergenz des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\mu(z)}$$

gilt die Ungleichung

$$M'(x) < \mu[M(x)]$$

sogar in Intervallen, wenn nur das Wachstum der Funktion $M(x)$ nicht zu stark ist.

9) Vergl. Fußnote 2.

Wenn man aber der Funktion $M(x)$ diese Beschränkung nicht auferlegt, so hat der Satz, den ich auf seine Richtigkeit prüfen will, keine Gültigkeit.

Man bestimme nämlich die Funktion $M(x)$ aus der Gleichung

$$\int_0^{M(x)} \frac{dz}{\mu(z)} = x.$$

Das ist möglich, weil

$$\int_0^{y} \frac{dz}{\mu(z)}$$

eine stetige, monoton von 0 bis ∞ wachsende, obendrein differentiierbare Funktion von y ist. Dann wird

$$\frac{M'(x)}{\mu[M(x)]} = \frac{d}{dx}\int_0^{M(x)} \frac{dz}{\mu(z)} = 1,$$

also $M'(x) \geqq \mu[M(x)]$.

Es gibt also zu jeder positiven, stetigen Funktion $\mu(z)$, die monoton wächst und das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\mu(z)}$$

divergent macht, eine Funktion $M(x) \geqq 0$, die stetig, monoton wachsend und differentiierbar ist, so daß die Ungleichung

$$M'(x) \geqq \mu[M(x)]$$

stets erfüllt ist.

Damit ist obiger Satz widerlegt und sogar gezeigt, daß es keine Funktion $\mu(z)$ gibt derart, daß (IV) gilt.

Literaturverzeichnis.

Borel: „Sur les zéros des fonctions entières“ (Acta mathematica t. XX).

Neder: Besprechung der Arbeiten von Varopoulos und Sarantopoulos im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. 48, S. 399/402.

Rémoundos: „Sur les fonctions croissantes et les fonctions entières“ (Comptes rendus t. 170, p. 829).

Sarantopoulos: „Les fonctions croissantes et la théorie des fonctions entières“ (Thèses, Straßburg 1923).

Varopoulos: „Sur quelques théorèmes de M. Rémoundos“ (Comptes rendus t. 171, p. 613).

Lebenslauf.

Am 5. Mai 1906 wurde ich, Peter Schürmann, als Sohn des Lehrers Hermann Schürmann und seiner Gemahlin Adele geb. Crone in Werdohl i. Westf. geboren. Nach vierjährigem Besuch der Volksschule meines Heimatortes besuchte ich fünf Jahre die Rektoratsschule daselbst und wurde Ostern 1921 nach bestandener Prüfung in die Untersekunda des Realgymnasiums zu Altena aufgenommen, an dem mir am 20. März 1925 das Reifezeugnis zuerkannt wurde. Ich wandte mich dem Studium der Mathematik, Physik und Chemie zu und war von Ostern 1925 bis Ostern 1930 an den Universitäten Göttingen, Freiburg i. Br. und Münster i. W. immatrikuliert. Am 26. Februar 1931 bestand ich in Münster die Prüfung für die Promotion zum Doktor der Philosophie.

Herrn Professor Dr. L. Neder sage ich für die Anregung zu vorliegender Arbeit meinen herzlichsten Dank.